

Técnicas de projeto de algoritmos: Indução

ACH2002 - Introdução à Ciência da Computação II

Delano M. Beder

Escola de Artes, Ciências e Humanidades (EACH)

Universidade de São Paulo

`dbeder@usp.br`

08/2008

Material baseado em slides dos professores Marcos Chaim, Cid de Souza e Cândida da Silva

- Técnica matemática muito poderosa para provar asserções sobre números naturais.
- Seja T um teorema que desejamos provar. Suponha que T tenha como parâmetro um número natural n .
- Ao invés de provar diretamente que T é válido para todos os valores de n , basta provar as duas condições a seguir:
 - ❶ T é válido para $n = 1$ (**passo base**)
 - ❷ Para todo $n > 1$, se T é válido para $n - 1$, então T é válido para n (**hipótese da indução ou passo indutivo**).

- Normalmente, provar a condição 1 é relativamente fácil.
- Provar a condição 2 é mais fácil do que provar o teorema, pois pode-se utilizar do fato de que T é válido para $n - 1$.
- Por que a indução funciona? Por que as duas condições são suficientes?
 - As condições 1 e 2 implicam que T é válido para $n = 2$.
 - Se válido T é válido para $n = 2$, então pela condição 2 implica que T também é válido para 3, e assim por diante.
- O princípio da indução é um axioma dos números naturais.

Exemplo 1

Considere a expressão de soma dos primeiros números naturais n , isto é, $S(n) = 1 + 2 + \cdots + n$.

Provar por indução que $S(n) = \frac{n*(n+1)}{2}$.

Exemplo 1

Considere a expressão de soma dos primeiros números naturais n , isto é, $S(n) = 1 + 2 + \dots + n$.

Provar por indução que $S(n) = \frac{n*(n+1)}{2}$.

Prova:

Passo base: Para $n = 1$, $S(1) = 1$ (trivial).

Exemplo 1

Considere a expressão de soma dos primeiros números naturais n , isto é, $S(n) = 1 + 2 + \dots + n$.

Provar por indução que $S(n) = \frac{n*(n+1)}{2}$.

Prova:

Passo base: Para $n = 1$, $S(1) = 1$ (trivial).

Passo indutivo:

Pelo princípio da indução matemática podemos assumir

$S(n-1) = \frac{(n-1)*(n-1+1)}{2}$ como válido.

Mas $S(n) = S(n-1) + n = \frac{(n-1)*(n-1+1)}{2} + n = \frac{n*(n+1)}{2}$.

Assim, provamos o passo indutivo.

Logo, $S(n) = \frac{n*(n+1)}{2}$ para todo $n \geq 1$.

Exemplo 2

Prove por indução que $2^n > 2^{n-1} + 2^{n-2} + 2^{n-3} + \dots + 2^0$, $n \geq 1$.

Exemplo 2

Prove por indução que $2^n > 2^{n-1} + 2^{n-2} + 2^{n-3} + \dots + 2^0$, $n \geq 1$.

Prova:

Passo base: Para $n = 1$, $2^1 > 2^0$ (trivial).

Exemplo 2

Prove por indução que $2^n > 2^{n-1} + 2^{n-2} + 2^{n-3} + \dots + 2^0$, $n \geq 1$.

Prova:

Passo base: Para $n = 1$, $2^1 > 2^0$ (trivial).

Passo indutivo: Pelo princípio da indução matemática

$$2^{n-1} > 2^{n-2} + 2^{n-3} + \dots + 2^0 \text{ é verdadeiro}$$

Somando 2^{n-1} nos dois lados da inequação (lembrando que 2^{n-1} é positivo e por isso não altera o sinal da inequação) obtemos:

$$2 \cdot 2^{n-1} > 2^{n-1} + 2^{n-2} + 2^{n-3} + \dots + 2^0.$$

Portanto, $2^n > 2^{n-1} + 2^{n-2} + 2^{n-3} + \dots + 2^0$. O passo indutivo está provado.

Logo, $2^n > 2^{n-1} + 2^{n-2} + 2^{n-3} + \dots + 2^0$ para todo $n \geq 1$.

- Variação 1

- Caso base: $n = 1$
- Provar que para $\forall n \geq 2$, se a propriedade é válida para n , ela é válida para $n + 1$.

- Variação 2

- Caso base: $n = 1, 2$ e 3
- Provar que para $\forall n \geq 4$, se a propriedade é válida para n , ela é válida para $n + 1$.

- Variação 3 (Indução forte)

- Caso base: $n = 1$
- Provar que para $\forall n \geq 2$, se a propriedade é válida para $\forall m$ tal que $1 < m < n + 1$, ela é válida para $n + 1$

Exercícios - Indução Matemática

- 1 Prove que $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6}, \forall n \geq 1$
- 2 Prove que $1 + 3 + 5 + \dots + 2n - 1 = n^2, \forall n \geq 1$
- 3 Prove que $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \frac{n^4 + 2n^3 + n^2}{4}, \forall n \geq 1$
- 4 Prove que $1^3 + 3^3 + 5^3 + \dots + (2n - 1)^3 = 2n^4 - n^2, \forall n \geq 1$
- 5 Prove que $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^n = 2^{n+1} - 1, \forall n \geq 0$
- 6 Prove que $2^n \geq n^2, \forall n \geq 4$.
- 7 Prove que $\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}$
- 8 Prove a soma dos cubos de três números naturais positivos sucessivos é divisível por 9.
- 9 Prove que todo número natural $n > 1$ pode ser escrito como o produto de primos (indução forte).
- 10 Prove que todo número natural positivo pode ser escrito como a soma de diferentes potências de 2 (indução forte).

Estes exercícios possuem uma característica muito mais matemática do que computacional, fugindo um pouco do escopo desta disciplina.

Princípio da Recursão

- Definições recursivas de métodos são baseadas no *princípio matemático da indução*.
- A ideia é que a solução de um problema pode ser apresentada da seguinte forma:
 - Primeiramente, definimos a solução para os casos básicos;
 - Em seguida, definimos como resolver o problema para os demais casos, porém, de uma forma mais simples.



Usando Indução em Programação

- Problema: definir a multiplicação de dois números inteiros não negativos m e n , em termos da operação de adição
- Qual o caso base ?

Usando Indução em Programação

- Problema: definir a multiplicação de dois números inteiros não negativos m e n , em termos da operação de adição
- Qual o caso base ?
 - Se n é igual a 0, então a multiplicação é 0.
- Qual seria o passo indutivo

Usando Indução em Programação

- Problema: definir a multiplicação de dois números inteiros não negativos m e n , em termos da operação de adição
- Qual o caso base ?
 - Se n é igual a 0, então a multiplicação é 0.
- Qual seria o passo indutivo
 - Temos que expressar a solução para $n > 0$, supondo que já sabemos a solução para algum caso mais simples.
 - $m * n = m + (m * (n - 1))$.

Usando Indução em Programação

- Problema: definir a multiplicação de dois números inteiros não negativos m e n , em termos da operação de adição
- Qual o caso base ?
 - Se n é igual a 0, então a multiplicação é 0.
- Qual seria o passo indutivo
 - Temos que expressar a solução para $n > 0$, supondo que já sabemos a solução para algum caso mais simples.
 - $m * n = m + (m * (n - 1))$.
- Portanto, a solução do problema pode ser expressa:
 - $m * 0 = 0$
 - $m * n = m + (m * (n - 1))$
- Como programar esta solução em Java?

Usando Indução em Programação

```
class Aritr {  
  
    static int multr (int m, int n) {  
        if(n == 0) {  
            return 0;  
        }  
        else {  
            return (m + multr(m, n-1));  
        }  
    }  
}
```

Utilizando Recursão

Comando/ Expressão	Resultado (expressão)	Estado (após execução/avaliação)		
<code>mult (3,2) ...</code>		<code>m → 3</code> <code>n → 2</code>		
<code>n == 0</code>	<code>false</code>	<code>m → 3</code> <code>n → 2</code>		
<code>return m + mult (m,n-1)</code>	<code>...</code>	<code>m → 3</code> <code>n → 2</code>	<code>m → 3</code> <code>n → 1</code>	
<code>n == 0</code>	<code>false</code>	<code>m → 3</code> <code>n → 2</code>	<code>m → 3</code> <code>n → 1</code>	
<code>return m + mult (m,n-1)</code>	<code>...</code>	<code>m → 3</code> <code>n → 2</code>	<code>m → 3</code> <code>n → 1</code>	<code>m → 3</code> <code>n → 0</code>
<code>n == 0</code>	<code>true</code>	<code>m → 3</code> <code>n → 2</code>	<code>m → 3</code> <code>n → 1</code>	<code>m → 3</code> <code>n → 0</code>
<code>return 0</code>		<code>m → 3</code> <code>n → 2</code>	<code>m → 3</code> <code>n → 1</code>	
<code>return m + 0</code>		<code>m → 3</code> <code>n → 2</code>		
<code>return m + 3</code>				
<code>mult (3,2)</code>	<code>6</code>			

Recursão

- Para solucionar o problema, é feita uma outra chamada para o próprio método, por isso, este método é chamado *recursivo*.
- Recursividade geralmente permite uma descrição mais clara e concisa dos algoritmos, especialmente quando o problema é recursivo por natureza.
- Cada chamada do método `mult r` cria novas variáveis de mesmo nome `m` e `n`.
- Portanto, várias variáveis `m` e `n` podem existir em um dado momento.
- Em um dado instante, o nome (`m` ou `n`) refere-se à variável local ao corpo do método que está sendo executado.

Recursão

- As execuções das chamadas de métodos são feitas em uma *estrutura de pilha*.
- Pilha: estrutura na qual a inserção (ou alocação) e a retirada (ou liberação) de elementos é feita de maneira que o último elemento inserido é o primeiro a ser retirado.
- Assim, o último conjunto de variáveis alocadas na pilha corresponde às variáveis e aos parâmetros do último método chamado.
- O espaço de variáveis e parâmetros alocado para um método é chamado de *registro de ativação* desse método.
- O registro de ativação é desalocado quando termina a execução de um método.

- Variáveis que podem ser usadas no corpo de um método:
 - variáveis ou atributos de classe (*static*): criados uma única vez;
 - variáveis ou atributos de instância: criados quando é criado um novo objeto (*new*);
 - parâmetros e variáveis locais: criados cada vez que é invocado o método.
- Na criação de uma variável local a um método, se não for especificado um valor inicial, o valor armazenado será *indeterminado*.
 - Indeterminado = valor existente nos bytes alocados para essa variável na *pilha* de chamada dos métodos.

```
class Aritr {  
  
    static int multtr (int m, int n) {  
        int r = 0;  
  
        for (int i = 1; i <= n; i++) {  
            r += m;  
        }  
  
        return r;  
    }  
}
```

Iteração

Comando/ Expressão	Resultado (expressão)	Estado (após execução/avaliação)
<code>mult (3,2)</code>	...	$m \rightarrow 3, n \rightarrow 2$
<code>int r = 0</code>	...	$m \rightarrow 3, n \rightarrow 2, r \rightarrow 0$
<code>int i = 1</code>		$m \rightarrow 3, n \rightarrow 2, r \rightarrow 0, i \rightarrow 1$
<code>i <= n</code>	true	$m \rightarrow 3, n \rightarrow 2, r \rightarrow 0, i \rightarrow 1$
<code>r+=m</code>	3	$m \rightarrow 3, n \rightarrow 2, r \rightarrow 3, i \rightarrow 1$
<code>i++</code>	2	$m \rightarrow 3, n \rightarrow 2, r \rightarrow 3, i \rightarrow 2$
<code>i <= n</code>	true	$m \rightarrow 3, n \rightarrow 2, r \rightarrow 3, i \rightarrow 2$
<code>r+=m</code>	6	$m \rightarrow 3, n \rightarrow 2, r \rightarrow 6, i \rightarrow 2$
<code>i++</code>	3	$m \rightarrow 3, n \rightarrow 2, r \rightarrow 6, i \rightarrow 3$
<code>i <= n</code>	false	$m \rightarrow 3, n \rightarrow 2, r \rightarrow 6, i \rightarrow 3$
<code>for ...</code>		$m \rightarrow 3, n \rightarrow 2, r \rightarrow 6$
<code>return r</code>	6	$m \rightarrow 3, n \rightarrow 2, r \rightarrow 6$
<code>mult (3,2)</code>	6	

Recursão x Iteração

- Soluções recursivas são geralmente mais concisas que as iterativas. Programas mais simples.
- Soluções iterativas em geral têm a memória limitada enquanto as recursivas, não.
- Cópia dos parâmetros a cada chamada recursiva é um custo adicional para as soluções recursivas.
- Programas recursivos que possuem chamadas no final do código são ditos terem *recursividade de cauda*. São facilmente transformáveis em uma versão não recursiva.
- Projetista de algoritmos deve levar consideração a complexidade (temporal e espacial), bem como os outros custos (e.g., facilidade de manutenção) para decidir por qual solução utilizar.

Exercícios

- 1 Forneça soluções recursivas para os problemas abaixo
 - cálculo do fatorial de um número.
 - cálculo do elemento n da série de Fibonacci.
 - $f_0 = 0, f_1 = 1,$
 - $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ para $n \geq 2$.
 - busca binária.
- 2 Como faço para calcular a complexidade (temporal ou espacial) de um algoritmo recursivo?
- 3 Escreva um método recursivo que calcule a soma dos elementos positivos do vetor de inteiros $v[0..n - 1]$. O problema faz sentido quando n é igual a 0? Quanto deve valer a soma nesse caso? (Retirado de [1])
- 4 Escreva um método recursivo `maxmin` que calcule o valor de um elemento máximo e o valor de um elemento mínimo de um vetor $v[0..n - 1]$. Quantas comparações envolvendo os elementos do vetor a sua função faz? (Retirado de [1])

Exercícios

- 5 Escreva um método recursivo que calcule a soma dos elementos positivos do vetor $v[ini..fim - 1]$. O problema faz sentido quando ini é igual a fim ? Quanto deve valer a soma nesse caso? (Retirado de [1])
- 6 Escreva um método recursivo que calcule a soma dos dígitos de um inteiro positivo n . A soma dos dígitos de 132, por exemplo, é 6. (Retirado de [1])
- 7 Escreva um método recursivo `onde()`. Ao receber um inteiro x , um vetor v e um inteiro n , o método deve devolver j no intervalo fechado $0 \dots n - 1$ tal que $v[j] == x$. Se tal j não existe, o método deve devolver -1. (Retirado de [1])
- 8 Escreva um método recursivo que recebe um inteiro x , um vetor v e inteiros ini e fim e devolve j tal que $ini \leq j \leq fim - 1$ e $v[j] == x$. Se tal j não existe então devolve $ini-1$. (Retirado de [1])

Referências utilizadas: [1] (Capítulo 5) e [2] (páginas 35-42).

[1] C. Camarão & L. Figueiredo. *Programação de Computadores em Java*. Livros Técnicos e Científicos Editora, 2003.

[2] N. Ziviani. *Projeto de Algoritmos com implementações em C e Pascal*. Editora Thomson, 2a. Edição, 2004.