

Exercício 6

$$\begin{aligned} T(n) &= 1 && \text{para } n = 1 \\ T(n) &= T(n-1) + n && \text{para } n > 1 \end{aligned}$$

1º) $T(n) = T(n-1) + n \Rightarrow$ copie a fórmula original

2º) descubra o passo: $T(n)$ está escrito em função de $T(n-1)$
 $\Rightarrow$ a cada passo o parâmetro subtraído em 1

3º) isole as equações para “os próximos passos”: $T(n-1)$, $T(n-2)$, etc. Isto é, na equação original substitua todo n por $n-1$ (próximo passo), por $n-2$ (passo seguinte) e assim por diante:

$$\begin{aligned} T(\mathbf{n-1}) &= 1 * T(\mathbf{n-1-1}) + \mathbf{n-1} = 1 * T(n-2) + n-1 \\ T(\mathbf{n-2}) &= 1 * T(\mathbf{n-2-1}) + \mathbf{n-2} = 1 * T(n-3) + n-2 \\ T(\mathbf{n-3}) &= 1 * T(\mathbf{n-3-1}) + \mathbf{n-3} = 1 * T(n-4) + n-3 \end{aligned}$$

4º) Substitua os valores isolados na fórmula original: substitua $T(n-1)$ pelo valor que você isolou acima e em seguida faça o mesmo para $T(n-2)$:

$$T(n) = 1 * \mathbf{T(n-1)} + n \quad (\text{fórmula original}) \quad \mathbf{1^\circ}$$

agora iremos substituir o valor de $T(n-1)$

$$T(n) = 1 * (\mathbf{1 * T(n-2) + n-1}) + n$$
$$T(n) = 1 * \mathbf{T(n-2)} + n-1 + n \quad \mathbf{2^\circ}$$

agora iremos substituir o valor de $T(n-2)$

$$T(n) = 1 * (\mathbf{1 * T(n-3) + n-2}) + n-1 + n$$
$$T(n) = 1 * \mathbf{T(n-3)} + n-2 + n-1 + n \quad \mathbf{3^\circ}$$

agora iremos substituir o valor de $T(n-3)$

$$T(n) = 1 * (\mathbf{1 * T(n-4) + n-3}) + n-2 + n-1 + n$$
$$T(n) = 1 * T(n-4) + n-3 + n-2 + n-1 + n \quad \mathbf{4^\circ}$$

5º) Identifique a fórmula do iésimo passo a partir dos passos anteriores:

$$1^\circ T(n) = 1 * T(n-1) + n$$

$$2^\circ T(n) = 1 * T(n-2) + n-1 + n$$

$$3^\circ T(n) = 1 * T(n-3) + n-2 + n-1 + n$$

$$4^\circ T(n) = 1 * T(n-4) + n-3 + n-2 + n-1 + n$$

$$i^\circ T(n) = 1 * T(n-i) + n-(i-1) + \dots + n-3 + n-2 + n-1 + n \quad ***$$

6º) Descubra o valor de i (de forma a igualar o parâmetro de T(x) ao parâmetro (valor de n) no caso base:

$$T(n-i) \leq T(1) \quad (\text{igualamos o valor dos parâmetros})$$

$$n-i = 1$$

$$n = i + 1$$

$$i = n - 1$$

***** há uma soma de progressão aritmética aqui (que pode ser identificada agora ou após a substituição de i)**

7º) Substitua o valor de i na fórmula do iésimo caso:

$$T(n) = T(n) = 1 * T(n-i) + n-(i-1) + \dots + n-2 + n-1 + n \text{ com } i=n-1$$

$$T(n) = 1 * T(n-((n-1)) + n-((n-1)-1) + \dots + n-2 + n-1 + n$$

$$T(n) = 1 * T(n-((n-1)) + n-(n-2) + \dots + n-2 + n-1 + n$$

$$T(n) = 1 * T(1) + 2 + \dots + n-2 + n-1 \quad (\text{Soma de P.A. de 2 a } n)$$

$$T(n) = 1 * T(1) + (2+n) * (n-1) / 2$$

$$T(n) = T(1) + (2 * n - 2 + n^2 - n) / 2$$

$$T(n) = T(1) + (n^2 + n - 2) / 2, \text{ pelo caso base sabemos que } T(1)=1$$

$$T(n) = 1 + (n^2 + n - 2) / 2$$

$$T(n) = (n^2 + n - 2 + 2) / 2$$

$$T(n) = (n^2 + n) / 2$$

8º) Identifique a complexidade dessa fórmula (se necessário/solicitado demonstre isso): $T(n) \in \theta(n^2)$

9º) Provando por indução que a equação foi corretamente encontrada:

Passo base: para $n=1$ o resultado esperado é 1 (caso base)

Com $T(n) = n$ e $n=1$ temos: $T(1) = (1*1+1)/2 = 1$ **correto**

Passo indutivo: por hipótese de indução assumimos que a fórmula estará correta para $n-1$, isto é, $T(n-1) = ((n-1)^2+n-1)/2$

$$T(n-1) = (n^2 - 2*n + 1 + n - 1)/2 = (n^2 - n)/2$$

Então, temos que verificar se $T(n) = (n^2+n)/2$,

sabendo-se que $T(n) = T(n-1) + n$ (equação original)

e partindo da H.I. que $T(n-1) = (n^2 - n)/2$

$$T(n) = 1 * (n^2 - n)/2 + n$$

$$T(n) = (n^2 - n + 2*n)/2$$

$$T(n) = (n^2+n)/2 \Rightarrow \text{provamos o passo indutivo}$$

Assim, demonstramos que $T(n) = 1*T(n-1) + (n^2+n)/2 =$
para $n \geq 1$