Resolução de Equação de Recorrência - Exercício 09

Prof. Luciano A. Digiampietri

Primeiro semestre de 2021

$T(n) = 1$ para $n=1$
$T(n) = T(n/2) + n$ para $n>1$

$T(n) = 1$ para $n=1$
$T(n) = T(n/2) + n$ para $n>1$

1^o: $T(n) = T(n/2) + n$

$T(n) = 1$ para $n=1$
$T(n) = T(n/2) + n$ para $n>1$

1^o: $T(n) = T(n/2) + n$
2^o: Identificação do "passo": o parâmetro de T está sendo dividido por dois a cada iteração

$T(n) = 1$ para $n=1$
$T(n) = T(n/2) + n$ para $n>1$

1^o: $T(n) = T(n/2) + n$
2^o: Identificação do "passo": o parâmetro de T está sendo dividido por dois a cada iteração
3^o: Isolando os "próximos passos"

T(n) = 1 para n=1
T(n) = T(n/2) + n para n>1

1^o: T(n) = T(n/2) + n
2^o: Identificação do "passo": o parâmetro de T está sendo dividido por dois a cada iteração
3^o: Isolando os "próximos passos"

$$T(\mathbf{n/2}) = T([\mathbf{n/2}]/2) + \mathbf{n/2} = T(n/2^2) + n/2$$
$$T(n/2^2) = T([n/2^2]/2) + n/2^2 = T(n/2^3) + n/2^2$$
$$T(n/2^3) = T([n/2^3]/2) + n/2^3 = T(n/2^4) + n/2^3$$
$$T(n/2^4) = T([n/2^4]/2) + n/2^4 = T(n/2^5) + n/2^4$$

$T(n) = 1$ para $n=1$
$T(n) = T(n/2) + n$ para $n>1$

4^o: Substituições

$T(n) = 1$ para $n=1$
 $T(n) = T(n/2) + n$ para $n>1$

4^o: Substituições

1^o $T(n) = T(n/2) + n$

T(n) = 1 para n=1
T(n) = T(n/2) + n para n>1

4^o: Substituições

1^o $T(n) = T(n/2) + n$

2^o $T(n) = T(n/2^2) + n/2 + n$

T(n) = 1 para n=1
T(n) = T(n/2) + n para n>1

4^o: Substituições

1^o $T(n) = T(n/2) + n$

2^o $T(n) = T(n/2^2) + n/2 + n$

3^o $T(n) = T(n/2^3) + n/2^2 + n/2 + n$

T(n) = 1 para n=1
T(n) = T(n/2) + n para n>1

4^o: Substituições

1^o $T(n) = T(n/2) + n$
2^o $T(n) = T(n/2^2) + n/2 + n$
3^o $T(n) = T(n/2^3) + n/2^2 + n/2 + n$
4^o $T(n) = T(n/2^4) + n/2^3 + n/2^2 + n/2 + n$
...

T(n) = 1 para n=1
T(n) = T(n/2) + n para n>1

4^o: Substituições

1^o $T(n) = T(n/2) + n$
2^o $T(n) = T(n/2^2) + n/2 + n$
3^o $T(n) = T(n/2^3) + n/2^2 + n/2 + n$
4^o $T(n) = T(n/2^4) + n/2^3 + n/2^2 + n/2 + n$
...
i^o $T(n) = T(n/2^i) + n/2^{i-1} + n/2^{i-2} + ... + n/2^2 + n/2 + n$

5^o: identificação do i-ésimo passo (continuação)

i^o $T(n) = T(n/2^i) + n/2^{i-1} + n/2^{i-2} + ... + n/2^2 + n/2 + n$

5^o: identificação do i-ésimo passo (continuação)

i^o $T(n) = T(n/2^i) + n/2^{i-1} + n/2^{i-2} + ... + n/2^2 + n/2 + n$
i^o $T(n) = T(n/2^i) + Soma\ de\ uma\ PG$

5^o: identificação do i-ésimo passo (continuação)

$$i^o \;\; T(n) = T(n/2^i) + n/2^{i-1} + n/2^{i-2} + ... + n/2^2 + n/2 + n$$
$$i^o \;\; T(n) = T(n/2^i) + Soma\ de\ uma\ PG$$

$$SPG(n) = a_1 * (q^n - 1)/(q - 1)$$

5^o: identificação do i-ésimo passo (continuação)

$$i^o \;\; T(n) = T(n/2^i) + n/2^{i-1} + n/2^{i-2} + ... + n/2^2 + n/2 + n$$
$$i^o \;\; T(n) = T(n/2^i) + Soma \; de \; uma \; PG$$

$$SPG(n) = a_1 * (q^n - 1)/(q - 1)$$

Primeiro termo: $n/2^{i-1}$
Razão: 2
Número de termos: i

5^o: identificação do i-ésimo passo (continuação)

$$i^o \ T(n) = T(n/2^i) + n/2^{i-1} + n/2^{i-2} + ... + n/2^2 + n/2 + n$$
$$i^o \ T(n) = T(n/2^i) + Soma\ de\ uma\ PG$$

$$SPG(n) = a_1 * (q^n - 1)/(q - 1)$$

Primeiro termo: $n/2^{i-1}$
Razão: 2
Número de termos: i
$SPG(i) = (n/2^{i-1}) * (2^i - 1)/(2 - 1)$

5^o: identificação do i-ésimo passo (continuação)

$$i^o \;\; T(n) = T(n/2^i) + n/2^{i-1} + n/2^{i-2} + ... + n/2^2 + n/2 + n$$
$$i^o \;\; T(n) = T(n/2^i) + Soma\ de\ uma\ PG$$

$$SPG(n) = a_1 * (q^n - 1)/(q - 1)$$

Primeiro termo: $n/2^{i-1}$
Razão: 2
Número de termos: i
$SPG(i) = (n/2^{i-1}) * (2^i - 1)/(2 - 1)$
$SPG(i) = (n/2^{i-1}) * (2^i - 1)$

5^o: identificação do i-ésimo passo (continuação)

$$i^o \ T(n) = T(n/2^i) + n/2^{i-1} + n/2^{i-2} + ... + n/2^2 + n/2 + n$$
$$i^o \ T(n) = T(n/2^i) + Soma\ de\ uma\ PG$$

$$SPG(n) = a_1 * (q^n - 1)/(q - 1)$$

Primeiro termo: $n/2^{i-1}$
Razão: 2
Número de termos: i
$SPG(i) = (n/2^{i-1}) * (2^i - 1)/(2 - 1)$
$SPG(i) = (n/2^{i-1}) * (2^i - 1)$
$SPG(i) = 2^i * n/2^{i-1} - n/2^{i-1}$

5^o: identificação do i-ésimo passo (continuação)

$$i^o \;\; T(n) = T(n/2^i) + n/2^{i-1} + n/2^{i-2} + ... + n/2^2 + n/2 + n$$
$$i^o \;\; T(n) = T(n/2^i) + Soma\ de\ uma\ PG$$

$$SPG(n) = a_1 * (q^n - 1)/(q - 1)$$

Primeiro termo: $n/2^{i-1}$
Razão: 2
Número de termos: i
$SPG(i) = (n/2^{i-1}) * (2^i - 1)/(2 - 1)$
$SPG(i) = (n/2^{i-1}) * (2^i - 1)$
$SPG(i) = 2^i * n/2^{i-1} - n/2^{i-1}$

$SPG(i) = 2 * n - n/2^{i-1}$

5^o: identificação do i-ésimo passo (continuação)

$$i^o \quad T(n) = T(n/2^i) + n/2^{i-1} + n/2^{i-2} + ... + n/2^2 + n/2 + n$$
$$i^o \quad T(n) = T(n/2^i) + Soma\ de\ uma\ PG$$

$$SPG(n) = a_1 * (q^n - 1)/(q - 1)$$

Primeiro termo: $n/2^{i-1}$
Razão: 2
Número de termos: i
$SPG(i) = (n/2^{i-1}) * (2^i - 1)/(2 - 1)$
$SPG(i) = (n/2^{i-1}) * (2^i - 1)$
$SPG(i) = 2^i * n/2^{i-1} - n/2^{i-1}$

$SPG(i) = 2 * n - n/2^{i-1}$

Primeiro termo: n
Razão: $1/2$
Número de termos: i

5^o: identificação do i-ésimo passo (continuação)

$$i^o \;\; T(n) = T(n/2^i) + n/2^{i-1} + n/2^{i-2} + ... + n/2^2 + n/2 + n$$
$$i^o \;\; T(n) = T(n/2^i) + Soma\ de\ uma\ PG$$

$$SPG(n) = a_1 * (q^n - 1)/(q - 1)$$

Primeiro termo: $n/2^{i-1}$
Razão: 2
Número de termos: i
$SPG(i) = (n/2^{i-1}) * (2^i - 1)/(2 - 1)$
$SPG(i) = (n/2^{i-1}) * (2^i - 1)$
$SPG(i) = 2^i * n/2^{i-1} - n/2^{i-1}$

$SPG(i) = 2 * n - n/2^{i-1}$

Primeiro termo: n
Razão: $1/2$
Número de termos: i
$SPG(i) = (n) * ((1/2)^i - 1)/(1/2 - 1)$

5^o: identificação do i-ésimo passo (continuação)

$$i^o \quad T(n) = T(n/2^i) + n/2^{i-1} + n/2^{i-2} + ... + n/2^2 + n/2 + n$$
$$i^o \quad T(n) = T(n/2^i) + Soma\ de\ uma\ PG$$

$$SPG(n) = a_1 * (q^n - 1)/(q - 1)$$

Primeiro termo: $n/2^{i-1}$
Razão: 2
Número de termos: i
$SPG(i) = (n/2^{i-1}) * (2^i - 1)/(2 - 1)$
$SPG(i) = (n/2^{i-1}) * (2^i - 1)$
$SPG(i) = 2^i * n/2^{i-1} - n/2^{i-1}$

$SPG(i) = 2 * n - n/2^{i-1}$

Primeiro termo: n
Razão: $1/2$
Número de termos: i
$SPG(i) = (n) * ((1/2)^i - 1)/(1/2 - 1)$
$SPG(i) = (n) * ((1/2)^i - 1)/(-1/2)$

5^o: identificação do i-ésimo passo (continuação)

$$i^o \;\; T(n) = T(n/2^i) + n/2^{i-1} + n/2^{i-2} + ... + n/2^2 + n/2 + n$$
$$i^o \;\; T(n) = T(n/2^i) + Soma\ de\ uma\ PG$$

$$SPG(n) = a_1 * (q^n - 1)/(q - 1)$$

Primeiro termo: $n/2^{i-1}$
Razão: 2
Número de termos: i
$SPG(i) = (n/2^{i-1}) * (2^i - 1)/(2 - 1)$
$SPG(i) = (n/2^{i-1}) * (2^i - 1)$
$SPG(i) = 2^i * n/2^{i-1} - n/2^{i-1}$

$SPG(i) = 2 * n - n/2^{i-1}$

Primeiro termo: n
Razão: $1/2$
Número de termos: i
$SPG(i) = (n) * ((1/2)^i - 1)/(1/2 - 1)$
$SPG(i) = (n) * ((1/2)^i - 1)/(-1/2)$
$SPG(i) = (-2 * n) * ((1/2)^i - 1)$

5^o: identificação do i-ésimo passo (continuação)

$$i^o \ \ T(n) = T(n/2^i) + n/2^{i-1} + n/2^{i-2} + ... + n/2^2 + n/2 + n$$
$$i^o \ \ T(n) = T(n/2^i) + Soma\ de\ uma\ PG$$

$$SPG(n) = a_1 * (q^n - 1)/(q - 1)$$

Primeiro termo: $n/2^{i-1}$
Razão: 2
Número de termos: i
$SPG(i) = (n/2^{i-1}) * (2^i - 1)/(2 - 1)$
$SPG(i) = (n/2^{i-1}) * (2^i - 1)$
$SPG(i) = 2^i * n/2^{i-1} - n/2^{i-1}$

$SPG(i) = 2 * n - n/2^{i-1}$

Primeiro termo: n
Razão: $1/2$
Número de termos: i
$SPG(i) = (n) * ((1/2)^i - 1)/(1/2 - 1)$
$SPG(i) = (n) * ((1/2)^i - 1)/(-1/2)$
$SPG(i) = (-2 * n) * ((1/2)^i - 1)$
$SPG(i) = (-2n/2^i) + 2 * n$

5^o: identificação do i-ésimo passo (continuação)

$$i^o \;\; T(n) = T(n/2^i) + n/2^{i-1} + n/2^{i-2} + ... + n/2^2 + n/2 + n$$
$$i^o \;\; T(n) = T(n/2^i) + Soma\ de\ uma\ PG$$

$$SPG(n) = a_1 * (q^n - 1)/(q - 1)$$

Primeiro termo: $n/2^{i-1}$
Razão: 2
Número de termos: i
$SPG(i) = (n/2^{i-1}) * (2^i - 1)/(2 - 1)$
$SPG(i) = (n/2^{i-1}) * (2^i - 1)$
$SPG(i) = 2^i * n/2^{i-1} - n/2^{i-1}$

$SPG(i) = 2 * n - n/2^{i-1}$

Primeiro termo: n
Razão: $1/2$
Número de termos: i
$SPG(i) = (n) * ((1/2)^i - 1)/(1/2 - 1)$
$SPG(i) = (n) * ((1/2)^i - 1)/(-1/2)$
$SPG(i) = (-2 * n) * ((1/2)^i - 1)$
$SPG(i) = (-2n/2^i) + 2 * n)$

$SPG(i) = -n/2^{i-1} + 2 * n$

5^o: identificação do i-ésimo passo (continuação)

$$i^o \; T(n) = T(n/2^i) + n/2^{i-1} + n/2^{i-2} + ... + n/2^2 + n/2 + n$$
$$i^o \; T(n) = T(n/2^i) + Soma\ de\ uma\ PG$$

$$SPG(n) = a_1 * (q^n - 1)/(q - 1)$$

Primeiro termo: $n/2^{i-1}$
Razão: 2
Número de termos: i
$SPG(i) = (n/2^{i-1}) * (2^i - 1)/(2 - 1)$
$SPG(i) = (n/2^{i-1}) * (2^i - 1)$
$SPG(i) = 2^i * n/2^{i-1} - n/2^{i-1}$

$SPG(i) = 2 * n - n/2^{i-1}$

Primeiro termo: n
Razão: $1/2$
Número de termos: i
$SPG(i) = (n) * ((1/2)^i - 1)/(1/2 - 1)$
$SPG(i) = (n) * ((1/2)^i - 1)/(-1/2)$
$SPG(i) = (-2 * n) * ((1/2)^i - 1)$
$SPG(i) = (-2n/2^i) + 2 * n)$

$SPG(i) = -n/2^{i-1} + 2 * n$

$$i^o \; T(n) = T(n/2^i) + 2 * n - n/2^{i-1}$$

$T(n) = 1$ para $n=1$
$T(n) = T(n/2) + n$ para $n>1$

6^o: Identificação do valor de i para que o parâmetro de $T(n)$ seja igual ao parâmetro do caso base:

T(n) = 1 para n=1
T(n) = T(n/2) + n para n>1

6^o: Identificação do valor de i para que o parâmetro de T(n) seja igual ao parâmetro do caso base:

$T(1) <=> T(n/2^i)$

$T(n) = 1$ para $n=1$
$T(n) = T(n/2) + n$ para $n>1$

6^o: Identificação do valor de i para que o parâmetro de T(n) seja igual ao parâmetro do caso base:

$$T(1) <=> T(n/2^i)$$
$$1 = n/2^i$$
$$2^i = n$$
$$i = log_2 n$$

$T(n) = 1$ para $n=1$
$T(n) = T(n/2) + n$ para $n>1$

7^o: Substituir o valor de i na equação do i^o passo:

$T(n) = 1$ para $n=1$
$T(n) = T(n/2) + n$ para $n>1$

7^o: Substituir o valor de i na equação do i^o passo:

$$T(n) = T(n/2^i) + 2 * n - n/2^{i-1} \qquad com \quad i = log_2 n$$

$T(n) = 1$ para $n=1$
$T(n) = T(n/2) + n$ para $n>1$

7^o: Substituir o valor de i na equação do i^o passo:

$$T(n) = T(n/2^i) + 2*n - n/2^{i-1} \qquad com \quad i = log_2 n$$
$$T(n) = T(n/2^{log_2 n}) + 2*n - n/2^{log_2 n - 1}$$

T(n) = 1 para n=1
T(n) = T(n/2) + n para n>1

7^o: Substituir o valor de i na equação do i^o passo:

$$T(n) = T(n/2^i) + 2*n - n/2^{i-1} \qquad com \quad i = log_2 n$$
$$T(n) = T(n/2^{log_2 n}) + 2*n - n/2^{log_2 n-1}$$
$$T(n) = T(n/n) + 2*n - n/2^{log_2 n-1}$$

T(n) = 1 para n=1
T(n) = T(n/2) + n para n>1

7^o: Substituir o valor de i na equação do i^o passo:

$$T(n) = T(n/2^i) + 2*n - n/2^{i-1} \qquad com \quad i = log_2 n$$
$$T(n) = T(n/2^{log_2 n}) + 2*n - n/2^{log_2 n - 1}$$
$$T(n) = T(n/n) + 2*n - n/2^{log_2 n - 1}$$
$$T(n) = T(1) + 2*n - n/(2^{log_2 n} * 2^{-1})$$

T(n) = 1 para n=1
T(n) = T(n/2) + n para n>1

7^o: Substituir o valor de i na equação do i^o passo:

$$T(n) = T(n/2^i) + 2*n - n/2^{i-1} \qquad com \quad i = log_2 n$$
$$T(n) = T(n/2^{log_2 n}) + 2*n - n/2^{log_2 n - 1}$$
$$T(n) = T(n/n) + 2*n - n/2^{log_2 n - 1}$$
$$T(n) = T(1) + 2*n - n/(2^{log_2 n} * 2^{-1})$$
$$T(n) = 1 + 2*n - n/(n * 2^{-1})$$

T(n) = 1 para n=1
T(n) = T(n/2) + n para n>1

7^o: Substituir o valor de i na equação do i^o passo:

$$T(n) = T(n/2^i) + 2*n - n/2^{i-1} \qquad com \quad i = log_2 n$$
$$T(n) = T(n/2^{log_2 n}) + 2*n - n/2^{log_2 n - 1}$$
$$T(n) = T(n/n) + 2*n - n/2^{log_2 n - 1}$$
$$T(n) = T(1) + 2*n - n/(2^{log_2 n} * 2^{-1})$$
$$T(n) = 1 + 2*n - n/(n * 2^{-1})$$
$$T(n) = 1 + 2*n - 1/2^{-1}$$

T(n) = 1 para n=1
T(n) = T(n/2) + n para n>1

7^o: Substituir o valor de i na equação do i^o passo:

$$T(n) = T(n/2^i) + 2*n - n/2^{i-1} \qquad com \quad i = log_2 n$$
$$T(n) = T(n/2^{log_2 n}) + 2*n - n/2^{log_2 n - 1}$$
$$T(n) = T(n/n) + 2*n - n/2^{log_2 n - 1}$$
$$T(n) = T(1) + 2*n - n/(2^{log_2 n} * 2^{-1})$$
$$T(n) = 1 + 2*n - n/(n * 2^{-1})$$
$$T(n) = 1 + 2*n - 1/2^{-1}$$
$$T(n) = 2*n - 1$$

$T(n) = 1$ para $n=1$ $T(n) = T(n/2) + n$ para $n>1$

Demonstração de corretude (usando indução):

$T(n) = 1$ para $n=1$
 $T(n) = T(n/2) + n$ para $n>1$

Demonstração de corretude (usando indução):

Passo base: sabemos que $T(1) = 1$ (a partir da equação original)

T(n) = 1 para n=1
T(n) = T(n/2) + n para n>1

Demonstração de corretude (usando indução):

Passo base: sabemos que T(1) = 1 (a partir da equação original)

Para $T(n) = 2 * n - 1$, temos: $T(1) = 2 * 1 - 1 = 1$ [correto]

T(n) = 1 para n=1
T(n) = T(n/2) + n para n>1

Demonstração de corretude (usando indução):

Passo base: sabemos que T(1) = 1 (a partir da equação original)

Para $T(n) = 2 * n - 1$, temos: $T(1) = 2 * 1 - 1 = 1$ [correto]

Por Hipótese de Indução, assumimos que:

$T(n/2) = 2 * n/2 - 1 =$ **n - 1**

T(n) = 1 para n=1
T(n) = T(n/2) + n para n>1

Demonstração de corretude (usando indução):

Passo base: sabemos que T(1) = 1 (a partir da equação original)

Para $T(n) = 2 * n - 1$, temos: $T(1) = 2 * 1 - 1 = 1$ [correto]

Por Hipótese de Indução, assumimos que:

$T(n/2) = 2 * n/2 - 1 =$ **n - 1**

$T(n) =$ **T(n/2)** $+ n$, por H.I. temos:

$T(n) =$ **n - 1** $+ n$

T(n) = 1 para n=1
T(n) = T(n/2) + n para n>1

Demonstração de corretude (usando indução):

Passo base: sabemos que T(1) = 1 (a partir da equação original)

Para $T(n) = 2 * n - 1$, temos: $T(1) = 2 * 1 - 1 = 1$ [correto]

Por Hipótese de Indução, assumimos que:

$T(n/2) = 2 * n/2 - 1 =$ **n - 1**

$T(n) =$ **T(n/2)** $+ n$, por H.I. temos:

$T(n) =$ **n - 1** $+ n$

$T(n) = 2 * n - 1$ [como queríamos demonstrar]

Resolução de Equação de Recorrência - Exercício 09

Prof. Luciano A. Digiampietri

Primeiro semestre de 2021