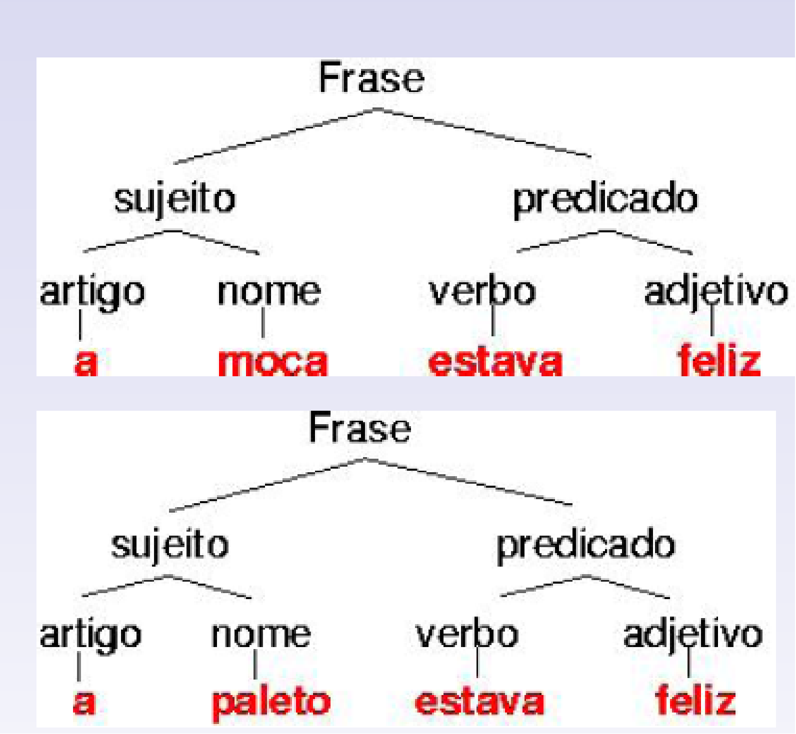
ACH2043
INTRODUÇÃO À TEORIA DA COMPUTAÇÃO

Introdução a Gramáticas e Hierarquia de Chomsky

Slides gentilmente cedidos pela
Profa. Ariane Machado Lima

Gramáticas

Frase	$\longrightarrow$	sujeito	predicado
sujeito	$\longrightarrow$	artigo	nome
artigo	$\longrightarrow$	a	
artigo	$\longrightarrow$	o	
nome	$\longrightarrow$	paletó	
nome	$\longrightarrow$	moça	
nome	$\longrightarrow$	dia	
predicado	$\longrightarrow$	verbo	adjetivo
verbo	$\longrightarrow$	é	
verbo	$\longrightarrow$	estava	
adjectivo	$\longrightarrow$	feliz	
adjectivo	$\longrightarrow$	azul	

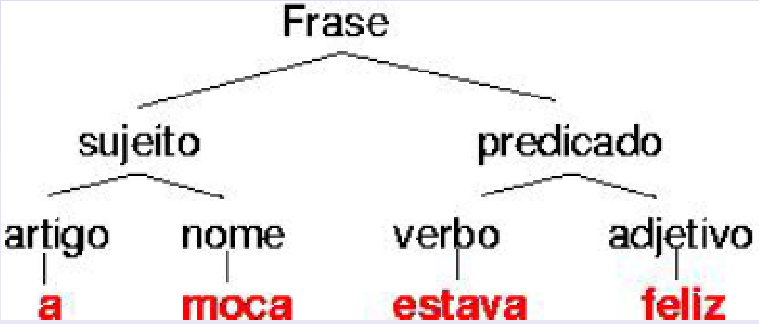


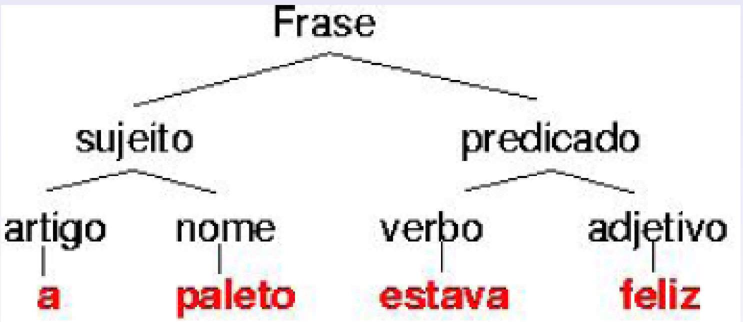
conjunto de produções

Gramáticas

símbolo inicial

Frase	$\longrightarrow$	sujeito	predicado
sujeito	$\longrightarrow$	artigo	nome
artigo	$\longrightarrow$	a	
artigo	$\longrightarrow$	o	
nome	$\longrightarrow$	paletó	
nome	$\longrightarrow$	moça	
nome	$\longrightarrow$	dia	
predicado	$\longrightarrow$	verbo	adjetivo
verbo	$\longrightarrow$	é	
verbo	$\longrightarrow$	estava	
adjectivo	$\longrightarrow$	feliz	
adjectivo	$\longrightarrow$	azul	





símbolos não-terminais

símbolos terminais

Gramáticas

- Definição: uma gramática G é uma quádrupla (V, Σ, S, P), onde
  - V é o conjunto de símbolos não-terminais (variáveis)
  - Σ é o conjunto de símbolos terminais
  - S é o símbolo inicial
  - P é o conjunto de produções da forma

    $(\Sigma \cup V)^* \, V \, (\Sigma \cup V)^* \rightarrow (\Sigma \cup V)^*$

Gramáticas

- Uma **forma sentencial** de uma gramática G é qualquer cadeia obtida pela aplicação recorrente das seguintes regras:
  - S (símbolo inicial de G) é uma forma sentencial
  - Seja $\alpha\rho\beta$ uma forma sentencial de G e $\rho \rightarrow \gamma$ uma produção de G. Então $\alpha\gamma\beta$ é também uma forma sentencial de G .

$(\alpha,\beta,\gamma \in (\Sigma \cup V)^*$ e $\rho \in (\Sigma \cup V)^* V (\Sigma \cup V)^*)$

Gramáticas

- Uma **forma sentencial** de uma gramática G é qualquer cadeia obtida pela aplicação recorrente das seguintes regras:
  - S (símbolo inicial de G) é uma forma sentencial
  - Seja $\alpha\rho\beta$ uma forma sentencial de G e $\rho \rightarrow \gamma$ uma produção de G. Então $\alpha\gamma\beta$ é também uma forma sentencial de G .

  ($\alpha,\beta,\gamma \in (\Sigma \cup V)^*$ e $\rho \in (\Sigma \cup V)^* V (\Sigma \cup V)^*$)
-

Gramáticas

- Uma **forma sentencial** de uma gramática G é qualquer cadeia obtida pela aplicação recorrente das seguintes regras:
  - S (símbolo inicial de G) é uma forma sentencial
  - Seja $\alpha\rho\beta$ uma forma sentencial de G e $\rho \rightarrow \gamma$ uma produção de G. Então $\alpha\gamma\beta$ é também uma forma sentencial de G .

  $(\alpha,\beta,\gamma \in (\Sigma \cup V)^*$ e $\rho \in (\Sigma \cup V)^* V (\Sigma \cup V)^*)$
- Derivação direta:
  - $\alpha\rho\beta \Rightarrow \alpha\gamma\beta$
    - Ex: <sujeito> <predicado> => <sujeito> <verbo> <adjetivo> => <sujeito> <verbo> feliz

Gramáticas

- Derivação: aplicação de zero ou mais derivações diretas
  - α =>* μ
  - isto é, α => β => … => μ
    - Ex: <sujeito> <predicado> =>* a paletó <verbo> <adjetivo>
- Uma cadeia w (w Є Σ*) é uma sentença de G se S =>* w
- Linguagem gerada por G:
  - L(G) = { w | S =>* w }

Gramáticas - Exemplos

- $G = (V, \Sigma, S, P)$, onde
  - $V = \{S, A\}$
  - $\Sigma = \{0,1,2,3\}$
  - $S = S$
  - $P = \{$

$$S \rightarrow 0S33$$

$$S \rightarrow A$$

$$A \rightarrow 12$$

$$A \rightarrow \varepsilon$$

$\}$

Gramáticas - Exemplos

- G = (V, Σ, S, P), onde
  - V = {S, A}
  - Σ = {0,1,2,3}
  - S = S
  - P = {

    $S \rightarrow 0S33$

    $S \rightarrow A$

    $A \rightarrow 12$

    $A \rightarrow \varepsilon$

  }

- Ex de formas sentenciais:

S, 0S33, 00S3333, 00A3333

- 0S33 => 00S3333
- 0S33 =>* 00A3333
- 0S33 =>* 0S33
- Ex de sentenças:

00123333, 12, ε

-

Gramáticas - Exemplos

- $G = (V, \Sigma, S, P)$, onde
  - $V = \{S, A\}$
  - $\Sigma = \{0,1,2,3\}$
  - $S = S$
  - $P = \{$

    $S \rightarrow 0S33$

    $S \rightarrow A$

    $A \rightarrow 12$

    $A \rightarrow \varepsilon$

  $\}$

- Ex de formas sentenciais:

S, 0S33, 00S3333, 00A3333

- 0S33 => 00S3333
- 0S33 =>* 00A3333
- 0S33 =>* 0S33
- Ex de sentenças:

00123333, 12, ε

- L(G) =

Gramáticas - Exemplos

- $G = (V, \Sigma, S, P)$, onde
  - $V = \{S, A\}$
  - $\Sigma = \{0,1,2,3\}$
  - $S = S$
  - $P = \{$

    $S \rightarrow 0S33$

    $S \rightarrow A$

    $A \rightarrow 12$

    $A \rightarrow \varepsilon$

  $\}$

- Ex de formas sentenciais:

S, 0S33, 00S3333, 00A3333

- 0S33 => 00S3333
- 0S33 =>* 00A3333
- 0S33 =>* 0S33
- Ex de sentenças:

00123333, 12, ε

- $L(G) = \{0^m 1^n 2^n 3^{2m} \mid m \geq 0 \text{ e } n = 0 \text{ ou } n = 1\}$

Gramáticas - Simplificação

- $G = (V, \Sigma, S, P)$, onde
  - $V = \{S, A\}$
  - $\Sigma = \{0,1,2,3\}$
  - $S = S$
  - $P = \{$

    $S \rightarrow 0S33$

    $S \rightarrow A$

    $A \rightarrow 12$

    $A \rightarrow \varepsilon$

  $\}$

- $G = (V, \Sigma, S, P)$, onde
  - $V = \{S, A\}$
  - $\Sigma = \{0,1,2,3\}$
  - $S = S$
  - $P = \{$

    $S \rightarrow 0S33 \mid A$

    $A \rightarrow 12 \mid \varepsilon$

  $\}$

Gramáticas

- Gramáticas são dispositivos generativos (geram cadeias)
- Dada uma cadeia w, reconhecer se w $\in$ L(G) é um processo chamado análise sintática
- Dependendo do formato das produções, a análise sintática pode ser mais ou menos complexa

Gramáticas lineares

$\alpha \rightarrow \beta$

- Gramática linear à esquerda:
  - $\alpha \in V$
  - $\beta \in \Sigma$, $\beta \in V$, $\beta \in V\Sigma$, $\beta = \varepsilon$
- Gramática linear à direita:
  - $\alpha \in V$
  - $\beta \in \Sigma$, $\beta \in V$, $\beta \in \Sigma V$, $\beta = \varepsilon$

Gramáticas lineares

- Gramática linear à direita:
  - $\alpha \in V$
  - $\beta \in \Sigma$, $\beta \in V$, $\beta \in \Sigma V$, $\beta = \varepsilon$
- Gramáticas lineares à direita lembram alguma coisa?
- Ex: $G = (V, \Sigma, S, P)$, onde
  - $V = \{S, A\}$
  - $\Sigma = \{0,1,2\}$
  - $S = S$
  - $P = \{ S \rightarrow 0S, S \rightarrow A, S \rightarrow \varepsilon, A \rightarrow 1A, A \rightarrow 2\}$

Gramáticas lineares à direita => autômatos finitos

$G = (V, \Sigma, S, P)$, $M = (Q, \Sigma, q_0, \delta, F)$

$Q = V \cup \{Z\}$, Z não pertence a Q

$q_0 = S$

$F = \{Z\}$

$\delta = \ldots$ (vou construir) $\delta \leftarrow \emptyset$

para cada produção em P

se $X \rightarrow aY$, então $\delta \leftarrow \delta \cup \{ (X,a) = Y \}$

se $X \rightarrow Y$, então $\delta \leftarrow \delta \cup \{ (X,\varepsilon) = Y \}$

se $X \rightarrow a$, então $\delta \leftarrow \delta \cup \{ (X,a) = Z \}$

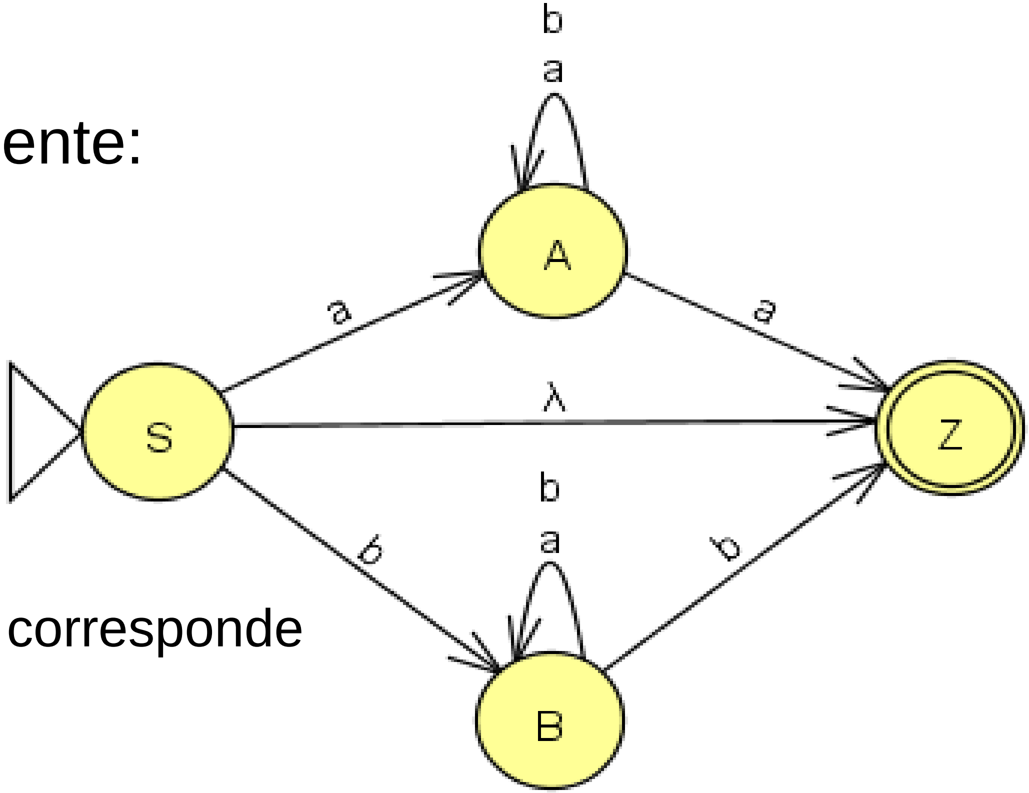
se $X \rightarrow \varepsilon$, então $\delta \leftarrow \delta \cup \{ (X,\varepsilon) = Z \}$

Gramáticas lineares à direita => autômatos finitos

- Exemplo: gramática G:

$$S \longrightarrow aA \mid bB \mid \varepsilon$$
$$A \longrightarrow aA \mid bA \mid a$$
$$B \longrightarrow aB \mid bB \mid b$$

- L(G) = ?
- Autômato M equivalente:



Obs: no JFlap, λ corresponde à palavra vazia

Autômatos finitos => Gramáticas lineares à direita

$M = (Q, \Sigma, q_0, \delta, F)$, $G = (V, \Sigma, S, P)$

$V = Q$

$S = q_0$

$P = \ldots$ (vou construir) $P \leftarrow \varnothing$

para cada transição de δ

Se $\delta(X,a) = Y$ então $P \leftarrow P \cup \{X \rightarrow aY\}$

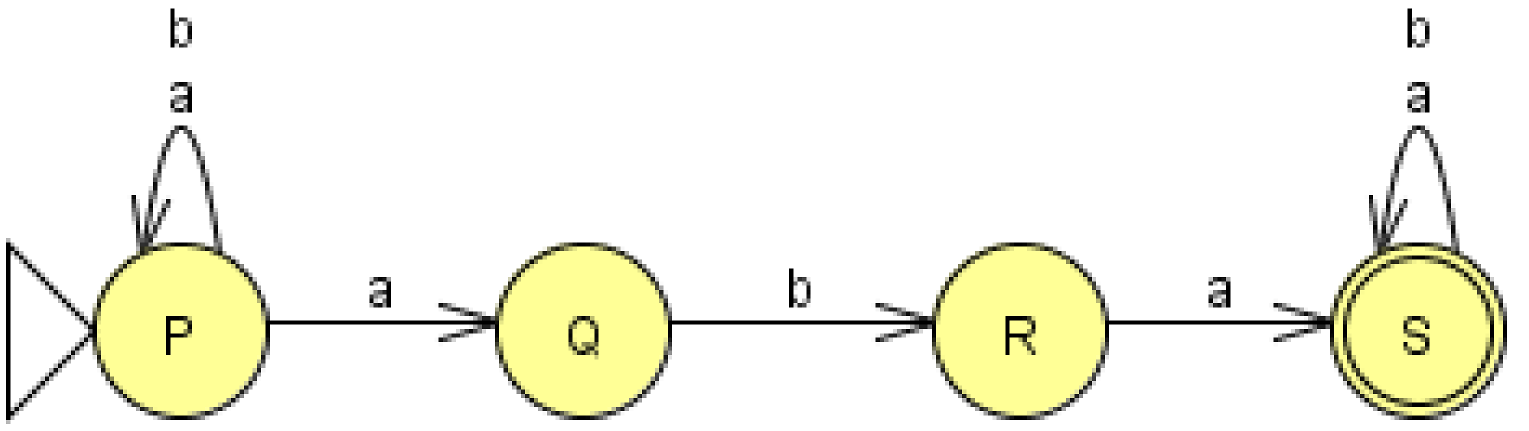
Se $\delta(X,\varepsilon) = Y$ então $P \leftarrow P \cup \{X \rightarrow Y\}$

para cada estado X de F

$P \leftarrow P \cup \{X \rightarrow \varepsilon\}$

Gramáticas lineares à direita => autômatos finitos

- Exemplo: autômato M:



- L(M) = ?

- Gramática G equivalente:

$$
\begin{aligned}
P &\longrightarrow aP \mid bP \mid aQ \\
Q &\longrightarrow bR \\
R &\longrightarrow aS \\
S &\longrightarrow aS \mid bS \mid \varepsilon
\end{aligned}
$$

Gramáticas lineares

- Fatos:
  - Gramáticas lineares à direita são equivalentes a autômatos finitos (geram a mesma linguagem)
  - Duas gramáticas são equivalentes se elas geram a mesma linguagem
  - Gramáticas lineares à direita e lineares à esquerda são equivalentes
- Portanto:
  - ⇒ Gramáticas lineares geram linguagens regulares
  - ⇒ Uma gramática é regular se ela for linear à esquerda ou linear à direita

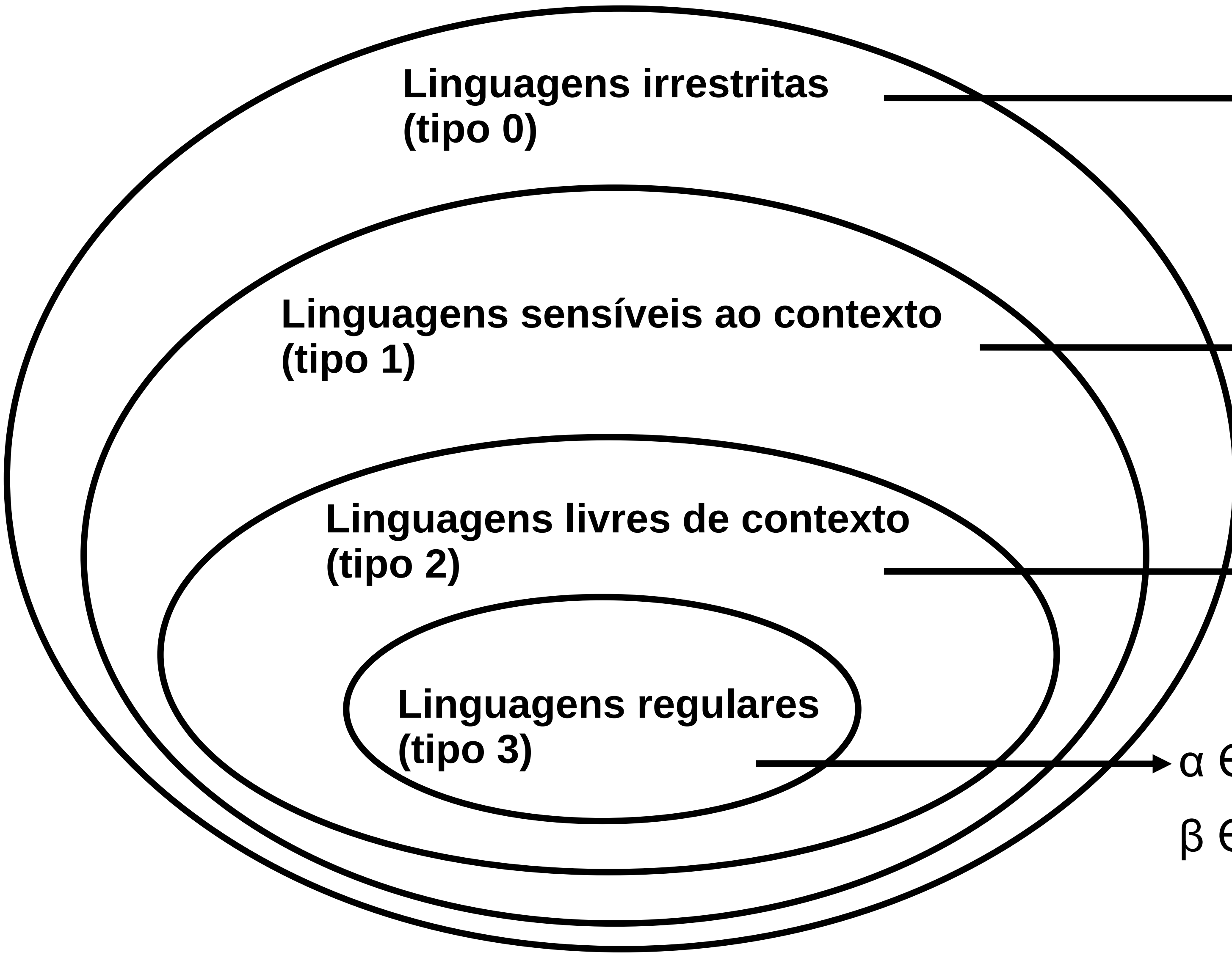
Gramáticas

- Gramáticas são dispositivos generativos (geram cadeias)
- Dada uma cadeia w, reconhecer se w Є L(G) é um processo chamado análise sintática
- Dependendo do formato das produção, a análise sintática pode ser mais ou menos complexa

Hierarquia de Chomsky

- Hierarquia das linguagens em classes de acordo com a sua complexidade relativa (Noam Chomsky, 1956)
- Cada classe de linguagem pode ser gerada por um tipo de gramática (formato das produções)
- Cada tipo de gramática tem uma complexidade de análise sintática diferente
- Na prática: dada uma linguagem, saber qual o dispositivo mais eficiente para análise sintática

Hierarquia de Chomsky $\alpha \rightarrow \beta$



$\alpha \in (V \cup \Sigma)^* V (V \cup \Sigma)^*$
$\beta \in (V \cup \Sigma)^*$

$\alpha \in (V \cup \Sigma)^* V (V \cup \Sigma)^*$
$\beta \in (V \cup \Sigma)^*$
$|\alpha| <= |\beta|$

$\alpha \in V$

$\beta \in (V \cup \Sigma)^*$

$\alpha \in V$

$\beta \in \Sigma_\varepsilon$, $\beta \in V$, $\beta \in$ ($V\Sigma$ou ΣV)

Hierarquia de Chomsky

Tipo	Classe de linguagens	Modelo de gramática	Modelo de reconhecedor
0	Irrestritas ou Recursivamente enumeráveis	Irrestrita	Máquina de Turing
1	Sensíveis ao contexto	Sensível ao contexto	Máquina de Turing com fita limitada
2	Livres de contexto	Livre de contexto	Autômato a pilha
3	Regulares	Regular (linear à direita ou à esquerda)	Autômato finito