ACH2011 – Cálculo I (2012.2)

Prova 2 – Novembro/2012

Nome: ______________________________ Nº USP: ____________

Turma/Horário: ____________________ Curso: ____________________

Observação 1: Duração da prova: **100** (**cem**) minutos.
Observação 2: O uso de calculadora/computador na prova é proibido.

1) [1,0 ponto] Determinar/simplificar

(i) $\cos\left(\frac{101\pi}{6}\right) = ?$

(ii) Todas as raízes de $\cos(x^2+\pi) = 0$.

(iii) $\tan\left(\dfrac{19\pi}{12}\right) = ?$ (**Hint:** $\frac{1}{4}+\frac{4}{3}$).

(iv) $16^x = 2e^{x^2}$; determinar x.

Nota: Este exercício não admitirá pontuação parcial, e a pontuação integral (1,0 ponto) será concedida somente se todos os quatro itens forem respondidos corretamente.

---

1) (i) $\cos\left(\frac{101\pi}{6}\right) = \cos\left(8\cdot 2\pi + \frac{5\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

(ii) Sendo os elementos do conjunto $\{\frac{\pi}{2}+n\pi : n\in\mathbb{Z}\}$ as raízes de $\cos y = 0$, a equação $\cos(x^2+\pi) = 0$ requer como solução os elementos do conjunto $\left\{\pm\sqrt{\left(m-\frac{1}{2}\right)\pi} : m\in\mathbb{Z} \text{ e } m\geq 1\right\}$.

(iii) De $\frac{19}{12} = \frac{1}{4}+\frac{4}{3}$, tem-se

$$\begin{aligned}\tan\left(\frac{19\pi}{12}\right) &= \tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{4\pi}{3}\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{4\pi}{3}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{4\pi}{3}\right)} = \frac{\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{4\pi}{3}+\sin\frac{4\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4}}{\cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{4\pi}{3}-\sin\frac{4\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4}} \\ &= \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\frac{1}{2}\right)+\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\frac{1}{2}\right)-\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}} = -2-\sqrt{3}\,.\end{aligned}$$

(iv) Pela positividade das funções exponenciais, toma-se o logaritmo (natural) de ambos membros, levando a

$$\ln\left(16^x\right) = \ln\left(2e^{x^2}\right) \Leftrightarrow x\ln 16 = \ln 2 + \ln\left(e^{x^2}\right) \Leftrightarrow x^2 - 4x\ln 2 + \ln 2 = 0\,,$$

donde $x = 2\ln 2 + \sqrt{\ln 2\,(4\ln 2 - 1)}$ ou $x = 2\ln 2 - \sqrt{\ln 2\,(4\ln 2-1)}$.

---

2) [4,0 pontos] Expandir, em série de Taylor, a função $f(x) = \ln\left[1+\tan\left(\frac{\pi x}{4}\right)\right]$ em torno do ponto $x_0 = 1$. A série deve ter, no mínimo, três termos não-nulos (*i.e.*, termos de segunda ordem).

---

2) Pela regra da cadeia, tem-se

$$f'(x) = \frac{1}{1+\tan\left(\frac{\pi x}{4}\right)}\cdot\frac{1}{\cos^2\left(\frac{\pi x}{4}\right)}\cdot\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}\cdot\frac{1}{\cos^2\left(\frac{\pi x}{4}\right)+\sin\left(\frac{\pi x}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi x}{4}\right)} = \frac{\pi/2}{2\cos^2\left(\frac{\pi x}{4}\right)+\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)}$$

e

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{\pi/2}{\left[2\cos^2\left(\frac{\pi x}{4}\right)+\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)\right]^2}\cdot(-1)\cdot\left[4\cos\left(\frac{\pi x}{4}\right)\left(-\sin\left(\frac{\pi x}{4}\right)\right)\cdot\frac{\pi}{4}+\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)\cdot\frac{\pi}{2}\right] \\ &= \frac{\pi^2}{2}\cdot\frac{\cos\left(\frac{\pi x}{4}\right)\sin\left(\frac{\pi x}{4}\right)-\frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)}{\left[2\cos^2\left(\frac{\pi x}{4}\right)+\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)\right]^2} = \frac{\pi^2}{4}\cdot\frac{\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)-\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)}{\left[2\cos^2\left(\frac{\pi x}{4}\right)+\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)\right]^2}, \end{aligned}$$

donde

$$f'(x_0=1)=\frac{\pi/2}{2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}=\frac{\pi}{4}$$

e

$$f''(x_0=1)=\frac{\pi^2}{4}\cdot\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)-\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\left[2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right]^2}=\frac{\pi^2}{16}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0)+f'(x_0)\,(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}\,(x-x_0)^2+\cdots \\ &= \ln 2+\frac{\pi}{4}\,(x-1)+\frac{\pi^2}{32}\,(x-1)^2+\cdots. \end{aligned}$$

---

3) [5,0 pontos] Esboçar o gráfico de $f(x)=\dfrac{|x|}{\ln^2(x^2)}$ determinando os limites adequados (e eventuais retas assíntotas), domínio, pontos críticos, intervalos de crescimento/decrescimento da função, concavidade e pontos de inflexão.

---

3) O domínio da função é $\mathrm{Dom}(f)=\{x\in\mathbb{R}: x\neq 0,-1,1\}$; ademais, a função é par e é entendida como

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x}{\ln^2(x^2)} & , \quad x>0 \\ -\dfrac{x}{\ln^2(x^2)} & , \quad x<0 \end{cases}, \text{ donde } \quad f'(x)=\begin{cases} \dfrac{\ln(x^2)-4}{\ln^3(x^2)} & , \quad x>0 \\ -\dfrac{\ln(x^2)-4}{\ln^3(x^2)} & , \quad x<0 \end{cases}.$$

Logo, os pontos críticos são $x_{c1}=e^2$ e $x_{c2}=-e^2$. Desta forma, a análise da primeira derivada conduz à tabela abaixo.

x	$x<-e^2$	$-e^2$	$-e^2<x<-1$	$-1<x<0$	$0<x<1$	$1<x<e^2$	e^2	$e^2<x$
Sinal de $f'(x)$	$-$	0	$+$	$-$	$+$	$-$	0	$+$
Crescimento	"$\searrow$"	"$\rightarrow$"	"$\nearrow$"	"$\searrow$"	"$\nearrow$"	"$\searrow$"	"$\rightarrow$"	"$\nearrow$"

A seguda derivada, por outro lado, é dada por

$$f''(x)=\begin{cases} -\dfrac{4}{x\ln^4(x^2)}\left[\ln(x^2)-6\right] & , \quad x>0 \\ \dfrac{4}{x\ln^4(x^2)}\left[\ln(x^2)-6\right] & , \quad x<0 \end{cases},$$

que tem as raízes $\tilde{x}_1=-e^3$ e $\tilde{x}_2=e^3$. A análise da concavidade conduz à tabela abaixo.

x	$x<-e^3$	$-e^3$	$-e^3<x<-1$	$-1<x<0$	$0<x<1$	$1<x<e^3$	e^3	$e^3<x$
Sinal de $f''(x)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	0	$-$
Concavidade	"$\cap$"	x	"$\cup$"	"$\cup$"	"$\cup$"	"$\cup$"	x	"$\cap$"

Os pontos $\tilde{x}_1 = -e^3$ e $\tilde{x}_2 = e^3$ são pontos de inflexão.

Analisar-se-á, agora, os limites $x \to \pm\infty$, $x \to -1^{\pm}$, $x \to 1^{\pm}$ e $x \to 0^{\pm}$:

$$\begin{cases}
\lim\limits_{x\to\infty} f(x) & = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x}{\ln^2(x^2)} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(x)'}{\left(\ln^2(x^2)\right)'} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x}{4\ln(x^2)} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(x)'}{(4\ln(x^2))'} \\[2ex]
 & = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x}{8} = +\infty \\[2ex]
\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) & = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{(-x)}{\ln^2(x^2)} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{(-x)'}{\left(\ln^2(x^2)\right)'} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{(-x)}{4\ln(x^2)} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{(-x)'}{(4\ln(x^2))'} \\[2ex]
 & = \lim\limits_{x\to-\infty} -\dfrac{x}{8} = +\infty \\[2ex]
\lim\limits_{x\to1^+} f(x) & = \lim\limits_{x\to1^+} \dfrac{x}{\ln^2(x^2)} = +\infty \\[2ex]
\lim\limits_{x\to1^-} f(x) & = \lim\limits_{x\to1^-} \dfrac{x}{\ln^2(x^2)} = +\infty \\[2ex]
\lim\limits_{x\to-1^+} f(x) & = \lim\limits_{x\to-1^+} -\dfrac{x}{\ln^2(x^2)} = +\infty \\[2ex]
\lim\limits_{x\to-1^-} f(x) & = \lim\limits_{x\to-1^-} -\dfrac{x}{\ln^2(x^2)} = +\infty \\[2ex]
\lim\limits_{x\to0^+} f(x) & = \lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{x}{\ln^2(x^2)} = 0 \\[2ex]
\lim\limits_{x\to0^-} f(x) & = \lim\limits_{x\to0^-} -\dfrac{x}{\ln^2(x^2)} = 0
\end{cases}$$

Das passagens intermediárias acima, nota-se a presença das retas assíntotas $x = 1$ e $x = -1$. De $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ e $\lim_{x\to\pm\infty} [f(x) - 0] = \infty$, a função não admite assíntota inclinada.

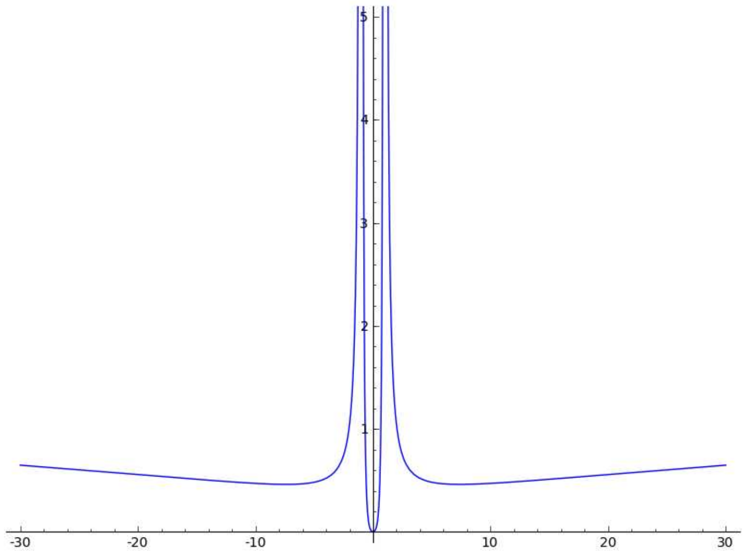

Figura 1: Gráfico de $f(x)$. O ponto $(0, 0)$ não pertence ao domínio.