

ACH2011 – Cálculo I (2/2012)

Lista de Exercícios 2

Observação: Parte dos exercícios foram adaptados do livro de B. P. Demidovitch (Б. П. Демидович), *Problemas e Exercícios de Análise Matemática*, 6.^a edição, Mir (1987) – impresso na U.R.S.S..

Mostrar que se $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L_1$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L_2$, $\lim_{x \rightarrow \infty} \psi(x) = L_3$, $\lim_{x \rightarrow \infty} \phi(x) = L_4$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, então:

$$001) \lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)] = L_1 + L_2 \quad 002) \lim_{x \rightarrow a} \alpha f(x) = \alpha L_1$$

$$003) \lim_{x \rightarrow a} [f(x)g(x)] = L_1 L_2 \quad 004) \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L_1}{L_2} \quad (\text{assuma } L_2 \neq 0 \text{ neste caso})$$

$$005) \lim_{x \rightarrow \infty} [\psi(x) + \phi(x)] = L_3 + L_4 \quad 006) \lim_{x \rightarrow \infty} \alpha \psi(x) = \alpha L_3$$

$$007) \lim_{x \rightarrow \infty} [\psi(x)\phi(x)] = L_3 L_4 \quad 008) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\psi(x)}{\phi(x)} = \frac{L_3}{L_4} \quad (\text{assuma } L_4 \neq 0 \text{ neste caso})$$

Mostrar que

$$009) \lim_{x \rightarrow a} x = a \quad 010) \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{x} = \frac{1}{a} \quad (\text{assuma } a \neq 0) \quad 011) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$012) \lim_{x \rightarrow 4} (x^3 + 1) = 65 \quad 013) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x}{x^2 + 1} = \frac{6}{5} \quad 014) \lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0 \quad \left(\text{usar } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \right)$$

Calcular os seguintes limites (tomar $n \in \mathbb{Z}$).

$$015) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \cdots + \frac{n}{n^2} \right) \quad 016) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + (-1)^n}{2n^2 - (-1)^n} \quad 017) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^{n+2} - 2^{n+1}}{3^{n+1} - 5^{n+3}}$$

$$018) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{3^n} \right) \quad 019) \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+3} - \sqrt{n}) \quad 020) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \sin(2^n)}{n^2 + 2}$$

Calcular os seguintes limites.

$$021) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x+2)^2}{x+3} \quad 022) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{999x}{x^3 - 2} \quad 023) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 5x}{10x + 1}$$

$$024) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 + 2x + 1}{x^4 + 4x^2 - x + 6} \quad 025) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x + 1}{x - \sqrt[3]{x}} \quad 026) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 1}{x - \sqrt[3]{2x}}$$

$$027) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - x + 1}{\sqrt{x^4 + x^3}} \quad 028) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x - \pi)^3 (2x + 6)^2}{2x^5 + 4x^4 + 3x - 10} \quad 029) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + \sqrt{x}}$$

$$030) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{4 - x^2}{x^2 - 3x + 2} \quad 031) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1} \quad 032) \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 5x}{x^2 - 25}$$

$$033) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2 - 2}{x^2 + 3x + 2} \quad 034) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4x + 4}{3x^2 - 6x} \quad 035) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 3x + 2}$$

$$036) \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^3 - a^3}{x^2 - (a+1)x + a} \quad 037) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} \quad 038) \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{3}{1 - x^3} - \frac{1}{1 - x} \right)$$

$$039) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{\sqrt{x} - 1} \quad 040) \lim_{x \rightarrow a} \frac{x - a}{\sqrt{x} - \sqrt{a}} \quad 041) \lim_{x \rightarrow 7} \frac{49 - x^2}{\sqrt{x - 3} - 2}$$

$$042) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{2x} \quad 043) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{2}}{x} \quad 044) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{x(x+a)} - x \right)$$

Calcular os seguintes limites.

$$\begin{array}{llll}
 045) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{x-1} \right)^x & 046) \lim_{x \rightarrow \infty} x \left(x - \sqrt{x^2 - 1} \right) & 047) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{x} \right)^x & 048) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\pi x)}{\sin(ex)} \\
 049) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - e^x}{x} & 050) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} & 051) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\tan(\pi x)}{2x+4} & 052) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{x^2} \right)^{\frac{2x}{x+2}} \\
 053) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3-x}{x+2} \right)^x & 054) \lim_{x \rightarrow 0} 2x \sin \frac{1}{x} & 055) \lim_{x \rightarrow \infty} 2x \sin \frac{1}{x} & 056) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3+x^2}{5x^2+1} \right)^{x^2} \\
 057) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{3x} & 058) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \tan x}{x^3} & 059) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{x} & 060) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cos \frac{\pi x}{2}}{\sqrt{x-1}} \\
 061) \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} & 062) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} & 063) \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin x - \sin a}{x - a} & 064) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{x+1} \right)^x \\
 065) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{4 - 2 \cos x}{\pi - 3x} & 066) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{\cos x}}{2x^2} & 067) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{2x} & 068) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin(3x)}{x + \sin(2x)} \\
 069) \lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{\pi}{x} & 070) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(1+e^x)}{2x} & 071) \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x-2}{|x-2|} & 072) \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x-2}{|x-2|} \\
 073) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+5x)}{x} & 074) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(ax) - \cos(bx)}{x^2} & 075) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} & 076) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \\
 077) \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{|x|} & 078) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{1 - \cos x} & 079) \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(1 + e^{\frac{1}{x}} \right) & 080) \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(1 + e^{\frac{1}{x}} \right) \\
 081) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|\sin x|}{3x} & 082) \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|\sin x|}{x} & 083) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(1+e^x)}{2x} & 084) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1 - \tan x}{\sin x - \cos x}
 \end{array}$$

Determinar $f(0)$ de sorte que a função seja contínua.

$$085) f(x) = \frac{x}{|x|} \quad 086) f(x) = \frac{1 - \cos x}{\pi x^2} \quad 087) f(x) = x^{\frac{3}{2}} \sin \frac{1}{x} \quad 088) f(x) = \frac{\ln(1-x) - \ln(1+x)}{3x}$$

Verificar a continuidade das seguintes funções (e classificar as eventuais descontinuidades)

$$\begin{array}{lll}
 089) f(x) = \frac{x}{|x|} & 090) f(x) = \frac{x^2}{x-3} & 091) f(x) = \frac{x^2}{2+x} \\
 092) f(x) = \frac{x^2-4}{\sqrt{x+7}-3} & 093) f(x) = \sin \frac{2}{x} & 094) f(x) = x \sin \frac{2}{x} \\
 095) f(x) = x \ln |\cos x| & 096) f(x) = \ln |\tan x| & 097) f(x) = e^{\frac{1}{x}} \\
 098) f(x) = e^{-\frac{1}{|x|}} & 099) f(x) = \frac{\pi}{1 + e^{\frac{1}{1-x}}} & 100) f(x) = \sin e^{\cos x}
 \end{array}$$

101) Mostrar que a composição de duas funções contínuas é contínua.

Dar exemplo (caso exista) de funções f e g tais que:

- 102) f e g descontínuas e $f+g$ contínua.
- 103) f e g contínuas e $f+g$ descontínua.
- 104) f e g descontínuas e $f \cdot g$ contínua.
- 105) f e g contínuas e $f \cdot g$ descontínua.
- 106) f contínua, g descontínua e $f \cdot g$ contínua.